



Manual de teoría: Álgebra Matemática Bachillerato

Realizado por José Pablo Flores Zúñiga

Contenido:

1) Álgebra

- 1.1 Factorización
- 1.2 Simplificación de expresiones algebraicas
- 1.3 Ecuaciones

Álgebra

1.1 Factorización

Recuerde que existen varios tipos para factorizar una expresión algebraica, los que debe conocer son:

Factor común

Este es el más importante de todos los métodos y siempre debe pensar en utilizarlo como primera opción.

Consiste en buscar en las expresiones, qué tienen en común tanto en coeficiente numérico como literal escogiendo el menor exponente de cada letra.

Finalmente debe dividir la expresión entre el factor común y expresarlo como factores. Ejemplo:

Factorizar: $4x^2bc^4 + 8x^2dc^2 - 16x^2bc^3$

Analizando los coeficientes numéricos observe que a pesar que son múltiplos de dos también son múltiplos de 4, siempre se debe escoger el mayor número posible en este caso 4. En el caso del factor literal observe que todas las expresiones tienen x y c pero no tienen en común b y d y escogemos el menor exponente, en el caso de x escogemos exponente 2 y en el caso de c escogemos 2.

Entonces el factor común es $4x^2c^2$ y dividimos la expresión entre el factor común dando factorizado:

$$4x^2c^2(bc^2 + 2d - 4bc)$$

Factorizar: $-a(x-1) + b(1-x)$

Observe que inmediatamente no existe ningún factor común por lo que hay que hacer un arreglo antes para poder factorizar note que $(x-1)$ y $(1-x)$ son opuestos.

Recuerde que opuestos significa la misma expresión multiplicada por un menos uno. Arreglada queda:

$-a(x-1) - b(-1+x) = -a(x-1) - b(x-1)$ Observe que quedó un menos y los signos dentro del paréntesis en la expresión que contiene b cambió y además $-1+x$ es igual a $x-1$.

Ahora observe que ya se puede factorizar porque ahora si hay un factor común, note que ambos términos tienen un menos y el $x-1$ o sea $-(x-1)$ es el factor común.

Factorizado queda: $-(x-1)(a+b)$ observe que $a+b$ tienen signos positivos ya que menos por menos es más.

Factorización por Agrupamiento

Este método ocurre cuando no se puede aplicar factor común pero a varios términos si se puede aplicar, dando finalmente una expresión que se puede aplicar la técnica de factor común.

Ejemplos:

Factorizar: $ab + ax - mb - mx$

Note que no se puede aplicar factor común. Entonces agrupamos términos que se pueda aplicar factor común:

$(ab + ax) + (-mb - mx)$ Entonces apliquemos factor común a cada paréntesis: $a(b+x) - m(b+x)$ y observe que ahora podemos aplicar factor común a la expresión quedando factorizada de la forma: $(b+x)(a-m)$

Factorizar: $mn - ms - xn + xs$

Agrupamos: $(mn - ms) + (-xn + xs)$ y aplicamos factor común a los paréntesis: $m(n-s) + x(-n+s)$ ahora para poder factorizar observe que las expresiones de los paréntesis son opuestas y en el segundo término multiplico por un menos: $m(n-s) - x(n-s)$ y finalmente se factoriza por factor común: $(n-s)(m-x)$

Diferencia de cuadrados perfectos

Si se tiene una diferencia de dos monomios cuadrados perfectos, para factorizar se saca raíz cuadrada a cada

monomio y la factoriza como la suma de las raíces por la diferencia de las raíces.

Ejemplos:

Factorizar: $81x^2 - 16$

Se extrae las raíces cuadradas de los dos monomios, siendo las raíces: $9x$ y 4 . Entonces la factorización queda:

$$(9x + 4)(9x - 4)$$

Factorizar: $49(x+1)^2 - (x-1)^2$

Compruebe que las raíces son respectivamente son $7(x+1)$ y $(x-1)$ Entonces la factorización queda de la forma:

$[7(x+1) + (x-1)][7(x+1) - (x-1)]$ y resolvemos las operaciones dentro de los paréntesis cuadrados:

$$(7x + 7 + x - 1)(7x + 7 - x + 1) = (8x - 6)(6x + 8)$$

Se podría aplicar la técnica de factor común a cada paréntesis:

$$2 \cdot 2(4x - 3)(3x + 4) = 4(4x - 3)(3x + 4)$$

A cada paréntesis el factor común es 2 , por eso aparece dos por dos.

Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$:

Para factorizar trinomios existen varias técnicas estudiadas en secundaria como por fórmulas notables o inspección. Para esta sección se utilizará el método general y no por las demás técnicas. Si usted el lector domina estas otras técnicas puede utilizarlas.

Para factorizar se calcula primeramente un discriminante que es de la forma: $\Delta = b^2 - 4ac$

Por ejemplo el trinomio: $2x^2 - 4x - 3$ en donde $a=2$, $b=-4$ y $c=-3$ entonces $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 40$

Ahora la forma factorizada es de la forma:

$$(2ax + b + \sqrt{\Delta})(2ax + b - \sqrt{\Delta})$$

Observe que este método es para factorizar y no debe confundirse con el método general para resolver ecuaciones cuadráticas.

Ejemplos:

Factorizar: $x^2 + 15x + 50$

Calculamos el discriminante, note que $a=1$ $b=15$ y $c=50$

entonces $\Delta = 15^2 - 4 \cdot 1 \cdot 50 = 25$

La factorización es:

$$(2 \cdot 1x + 15 + \sqrt{25})(2 \cdot 1x + 15 - \sqrt{25}) = (2x + 15 + 5)(2x + 15 - 5) \\ = (2x + 20)(2x + 10)$$

Utilizando factor común: $2 \cdot 2(x + 10)(x + 5)$ y por último los coeficientes se pierden quedando: $(x + 10)(x + 5)$

Factorizar: $x^2 - 4x + 4$

Se calcula el discriminante: $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$ entonces

factorizando queda: $(2 \cdot 1x - 4 + \sqrt{0})(2 \cdot 1x - 4 + \sqrt{0})$

$= (2x - 4)(2x - 4)$ Y factorizando por factor común:

$2 \cdot 2(x - 2)(x - 2)$ y se pierde los coeficientes quedando

finalmente: $(x - 2)(x - 2) = (x - 2)^2$

Métodos combinados:

Debe estar conciente que en algunas ocasiones al factorizar una expresión, quedan factores que se pueden volver a factorizar. Entonces se debe seguir utilizando otras técnicas para realizar la factorización al máximo.

Este tipo de ejercicios normalmente aparece el enunciado como “factorice al máximo la expresión” o tenga cuidado cuando le piden averiguar uno de los factores de factorizar al máximo o completamente.

Ejemplos:

Factorizar al máximo: $xa^2bz^4 - 2xa^2bz^2 + xa^2b$

Factorizamos con factor común: $xa^2b(z^4 - 2z^2 + 1)$

Observe que en el paréntesis es de grado 4 y es equivalente a escribir: $xa^2b[(z^2)^2 - 2(z^2) + 1]$ quedando en

el paréntesis un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y para que no se confunda podemos utilizar que sea $y = z^2$ y reemplazamos en la expresión quedando: $xa^2b(y^2 - 2y + 1)$

y calculamos el discriminante: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ entonces la factorización queda:

$$xa^2b(2 \cdot 1y - 2 + \sqrt{0})(2 \cdot 1y - 2 - \sqrt{0}) = xa^2b(2y - 2)(2y - 2)$$

recuerde que sacamos factor común y eliminamos coeficientes en nuestro caso 2 es factor común en ambos

paréntesis, nos queda factorizado: $xa^2b(y - 1)(y - 1)$ pero

recuerde que $y = z^2$ y reemplazamos: $xa^2b(z^2 - 1)(z^2 - 1)$ y note que en cada paréntesis queda diferencia de cuadrados perfectos, entonces finalmente la expresión

queda factorizado como: $xa^2b(z - 1)(z + 1)(z - 1)(z + 1)$ igual a la expresión: $xa^2b(z - 1)^2(z + 1)^2$

Factorizar al máximo: $ax^3 + 2bx^3 - axy^2 - 2bxy^2$

Utilizando factor común: $x(ax^2 + 2bx^2 - ay^2 - 2by^2)$ en el paréntesis aplicamos agrupamiento y entonces queda factorizado como: $x(x^2 - y^2)(a + 2b)$ y note que en el primer paréntesis queda hay diferencia de cuadrados perfectos

entonces finalmente queda: $x(x + y)(x - y)(a + 2b)$

Ejercicios:

Factorice al máximo:

- 1) $ax + bx + nx + nb$
- 2) $hj - hk - xj + xk$
- 3) $ax(x-1) - bz(1-x) + ab(x-1)$
- 4) $m^2(x+2)^2 - (x-2)^2$
- 5) $x^2 + 4x + 4$
- 6) $2x^2 - 3x - 6$
- 7) $169x^2 - 121$
- 8) $ax^2 - 6ax + 4a$
- 9) $mnz^2 + 2mnz + mn$
- 10) $zx - zy + sx - sy$
- 11) $\sqrt{50}abc^2 + \sqrt{72}abc - \sqrt{32}ab$
- 12) $abr^4 - 81ab$
- 13) $xa^2bz^4 - 2xa^2bz^2 + xa^2b$
- 14) $ax^3 + 2bx^3 - axy^2 - 2bxy^2$
- 15) $256(x+1)^2 - (x-1)^2$

1.2 Simplificación de Expresiones Algebraicas

El consejo más grande para lograr con éxito este tipo de ejercicios es factorizar todas las expresiones algebraicas y luego cancelar términos iguales (recuerde que se cancela un numerador con un denominador).

Ejemplos:

$$a) \frac{3x^2 - x - 3}{15x + 10} = \frac{(3x + 2)(x - 1)}{5(3x + 2)} = \frac{x - 1}{5}$$

$$b) \frac{ax + bx + ca + cb}{za + zb} = \frac{(x + c)(a + b)}{z(a + b)} = \frac{x + c}{z}$$

$$c) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x - 2}{x + 3}$$

$$d) \frac{x^3 + 22x^2 + 121x}{x^3 - 121x} = \frac{x(x^2 + 22x + 121)}{x(x^2 - 121)} = \frac{(x + 11)(x + 11)}{(x + 11)(x - 11)} = \frac{x + 11}{x - 11}$$

$$e) \frac{x^4 + 6x^3 + 8x^2}{abx + 4ba} = \frac{x^2(x + 4)(x + 2)}{ba(x + 4)} = \frac{x^2(x + 2)}{ba}$$

$$f) \frac{-2x + 4}{x^2 - 2x} = \frac{-2(x - 2)}{x(x - 2)} = \frac{-2}{x}$$

Operaciones de fracciones racionales algebraicas

Multiplicación

Se factoriza y se simplifica. La multiplicación es como prolongar la línea fraccionaria y se multiplican factores; se aplica el método anterior.

Ejemplos

a) $\frac{x}{z} \cdot \frac{1}{x}$ Es como prolongar la línea fraccionaria: $\frac{x}{zx} = \frac{1}{z}$

b) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 9} \cdot \frac{x + 3}{x + 2} = \frac{(x + 2)^2(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)(x + 2)} = \frac{x + 2}{x - 3}$

División

Existen varios métodos para la división, sugiero que se escriba la primera fracción intacta y se multiplica por el recíproco de la segunda fracción. Después se resuelve con el método de multiplicación. Nota: recuerde que recíproco es cambiar el numerador con el denominador.

Si se tiene $\frac{a}{b}$ el recíproco es $\frac{b}{a}$

Ejemplos:

a) $\frac{1}{x^2 - 2x} \div \frac{x}{2x - 4} = \frac{1}{x^2 - 2x} \cdot \frac{2x - 4}{x} = \frac{2(x - 2)}{x \cdot x(x - 2)} = \frac{2}{x^2}$

b) $\frac{x + 3}{2x - 6} \div \frac{4x + 12}{x - 3} = \frac{x + 3}{2x - 6} \cdot \frac{x - 3}{4x + 12} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{2 \cdot 4(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{8}$

Sumas y restas

El método es exactamente igual como se suman y restan fracciones numéricas. Recuerde que si son heterogéneas se saca el mínimo común denominador.

Ejemplos:

a) $\frac{5}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2} - \frac{3}{(x-1)^3}$ note que el común

denominador es: $(x-1)^3$ y ahora se divide el común denominador entre cada denominador y lo que da se multiplica por el numerador:

$$= \frac{5(x-1)^2 + 8(x-1) - 3}{(x-1)^3} \text{ y se resuelve las operaciones}$$

$$\text{antes distribuyendo: } = \frac{5(x^2 - 2x + 1) + 8x - 8 - 3}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{5x^2 - 10x + 5 + 8x - 8 - 3}{(x-1)^3} = \frac{5x^2 - 2x - 6}{(x-1)^3}$$

Note que si factoriza el numerador, ningún término no se cancela con el denominador, entonces queda hasta ahí.

b) $\frac{x+1}{x^2 - x - 6} - \frac{x-4}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x+4}{x^2 + x - 2}$

Entonces factorizamos los denominadores:

$$\frac{x+1}{(x-3)(x+2)} - \frac{x-4}{(x-3)(x-1)} + \frac{x+4}{(x-1)(x+2)}$$

Note que el común denominador es $(x-3)(x+2)(x-1)$

Dividiendo el común denominador con cada denominar y lo que da se multiplica con el numerador queda:

$$= \frac{(x-1)^2 - (x-4)(x+2) + (x+4)(x-3)}{(x-3)(x+2)(x-1)}$$

Resolviendo las operaciones del numerador:

$$= \frac{(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 2x - 8) + (x^2 + x - 12)}{(x-3)(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x + 8 + x^2 + x - 12}{(x-3)(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 3}{(x-3)(x+2)(x-1)}$$

Ejercicios

Reduzca a una sola fracción y simplifique si es posible

$$1) x - y - \frac{x^2 - xy - y^2}{x - y}$$

$$2) \frac{7}{2x} + \frac{6}{x^2} - \frac{2}{3x}$$

$$3) \frac{4x-5}{2x^2-5x-3} - \frac{x}{2x^2-9x+9}$$

$$4) \frac{2b}{b+y} + \frac{3y}{b-y} + \frac{3y^2+b^2}{b^2-y^2}$$

$$5) \frac{a-2}{2a+2} - \frac{3a-4}{3a+3} + \frac{4a-1}{6a+6}$$

$$6) \frac{2b}{3a} \div \frac{2ab+b^2}{3a^2-3ab}$$

$$7) \frac{4}{m+1} \div \left(\frac{2m}{m^2-1} - \frac{2}{m-1} \right)$$

1.3 Ecuaciones

Cuadráticas

Son ecuaciones de términos algebraicos de grado dos y para resolverlas se lleva a la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ se calcula el discriminante de fórmula: $\Delta = b^2 - 4ac$ y los valores de x vienen dados por: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ o sea por el método general para resolver ecuaciones. (Recuerde es una ecuación y no una factorización)

Puede ocurrir varios casos:

- 1) Si el $\Delta > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones
- 2) Si el $\Delta = 0$ entonces la ecuación tiene una solución.
- 3) Si el $\Delta < 0$ entonces la ecuación no tiene solución real.

Ejemplos:

a) $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x}{3}$

Se multiplica en cruz: $3x+9 = x^2 - 2x$ los términos de la izquierda se pasan a la derecha: $0 = x^2 - 5x - 9$

Se calcula el discriminante: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9 = 61$

Entonces las dos soluciones son: $x = \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$

El conjunto solución es $S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{61}}{2}, \frac{5 + \sqrt{61}}{2} \right\}$ Recuerde que

debe hacerlo de esta manera ya que en la calculadora da los valores aproximados.

$$\text{b) } 3x(x-2)+5=2x^2-11x-1$$

$$3x^2-6x+5=2x^2-11x-1$$

$$3x^2-2x^2-6x+11x+5+1=0$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$\Delta=5^2-4(1)(6)=1$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x_1=-3$$

El conjunto solución: $S=\{-3,-2\}$

$$x_2=-2$$

$$\text{c) } \sqrt{2x^2-4x+1}=x-3$$

Elevamos al cuadrado en ambos lados:

$$\sqrt{2x^2-4x+1}^2=(x-3)^2$$

$$2x^2-4x+1=x^2-6x+9$$

$$x^2+2x-8=0$$

$$\Delta=2^2-4(1)(-8)=36$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$x_1=-4$$

$$x_2=2$$

El conjunto solución es: $S=\{-4,2\}$

$$\text{d) } x^2-x+4=0$$

$\Delta=(-1)^2-4(1)(4)=-15$ Entonces $\Delta < 0$ entonces no tiene solución real. El conjunto solución es: $S=\emptyset$ o: $S=\{ \}$

Exponencial

Para este tipo de ecuaciones es necesario repasar las leyes de potencia que ha aprendido desde séptimo año y ha utilizado por siempre. El método para resolverlas consiste en utilizar leyes de potencia para tener bases iguales. En algunos casos se necesita aplicar propiedades de logaritmos que este tema se tocará hasta la próxima sección.

Ejemplos:

$$a) 3^x \cdot 27 = 9^{x+2}$$

Factorizado las bases $27=3^3$ y $9=3^2$

$$3^x \cdot 3^3 = 3^{2(x+2)} \text{ Por leyes de potencia:}$$

$$3^{x+3} = 3^{2x+2} \text{ Y ya se tiene bases iguales y se cancelan:}$$

$$x+3 = 2x+2$$

$$1 = x$$

El conjunto solución es: $S = \{1\}$

$$b) \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{8}\right)^x \cdot 16$$

$$\text{Observe que: } \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{8}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \text{ y } 16 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-4}$$

$$-x^2 + 2 = 3x - 4$$

$$-x^2 - 3x + 6 = 0$$

La ecuación se convirtió en una cuadrática

$$\Delta = (-3)^2 - 4(-1)(6) = 45$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{-2}$$

$$x = \frac{-3 \mp 3\sqrt{5}}{2}$$

El conjunto solución de la ecuación es:

$$S = \left\{ \frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$c) 2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = 0,001(10^{3-x})^2$$

$$10^{x^2} = 10^{-3} \cdot 10^{6-2x}$$

$$10^{x^2} = 10^{-3+6-2x}$$

$$10^{x^2} = 10^{3-2x}$$

$$x^2 = 3 - 2x$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16 \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -3$$

El conjunto solución es: $S = \{-3, 1\}$

Propiedades de Logaritmos

$$1) \log_a^1 = 0 \quad a \neq 1$$

$$2) \log_a^a = 1 \quad a \neq 1$$

$$3) b^{\log_b^a} = a$$

$$4) \log_a^x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

$$5) \log_a^{x^n} = n \log_a^x$$

$$6) \log_a^x + \log_a^y = \log_a^{x \cdot y}$$

$$7) \log_a^x - \log_a^y = \log_a^{\frac{x}{y}}$$

$$8) \log_a^b = \frac{\log_x^b}{\log_x^a} \text{ Se utiliza base 10 o e generalmente}$$

$$9) \log_e^a = \ln a$$

$$10) \log_{10}^a = \log a$$

Ejemplos:

$$a) \log_2^x + \log_2^{a-b} = \log_2^{x(a-b)}$$

$$b) 2\log_3^2 + 1 = \log_3^4 + \log_3^3 = \log_3^{12}$$

$$c) 4 - 3\log_5^2 = \log_5^{1024} - \log_5^8 = \log_5^{\frac{1024}{8}} = \log_5^{128}$$

$$d) \log_4^2 + \log_4^8 = \log_4^{16} = \log_4^{4^2} = 2\log_4^4 = 2 \cdot 1 = 2$$

Ecuaciones Logarítmicas

El método consiste en utilizar propiedades de logaritmos y leyes de potencia para unir en un solo logaritmo de la misma base para cancelar el logaritmo similar a las ecuaciones exponenciales. Al final se prueban las posibles soluciones ya que los logaritmos sólo aceptan números positivos.

Ejemplos:

$$a) \log_2^x + 3 = 0 \text{ Usamos propiedades de logaritmos:}$$

$$\log_2^x + \log_2^8 = \log_2^1$$

$$\log_2^{8x} = \log_2^1$$

$$8x = 1$$

$$x = \frac{1}{8}$$

Recuerde que los logaritmos sólo aceptan números positivos y $\frac{1}{8}$ es positivo entonces $S = \left\{ \frac{1}{8} \right\}$

$$b) \ln x + \ln(x+1) - \ln(x+9) = 0$$

$$\ln \frac{x(x+1)}{x+9} = \ln 1$$

$$\ln \frac{x^2 + x}{x+9} = \ln 1$$

$$\frac{x^2 + x}{x+9} = 1$$

$$x^2 + x = x + 9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} = \pm 3$$

Ahora se prueban las posibles soluciones pero $\ln x$ sólo acepta números positivos entonces se descarta -3 , mientras que 3 si sirve para todos los logaritmos.

$$S = \{3\}$$

$$c) \log x + \log(1-x) + 2 = 1$$

$$\log x(1-x) + \log 100 = \log 10$$

$$\log(100x - 100x^2) = \log 10$$

$$-100x^2 + 100x = 10$$

$$10(-10x^2 + 10x - 1) = 0$$

$$-10x^2 + 10x - 1 = 0 \quad \Delta = 10^2 - 4(-10)(-1) = 60$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{60}}{-20} = \frac{10 \mp 2\sqrt{15}}{20} = \frac{5 \mp \sqrt{15}}{10}$$

$$\text{Probando logaritmos: } S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{15}}{10} \right\}$$

Ejercicios: Calcule las posibles soluciones:

$$1) \frac{x^2 + 4x - 3}{x + 6} = 1$$

$$2) (x + 2)(x - 6) = (2x + 5)(3x + 8)$$

$$3) \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

$$4) \sqrt{(x + 2)(x - 5)} = \sqrt{x + 6}$$

$$5) \frac{5x - 2}{8^{5 - 2x}} = 0,25$$

$$6) 5^{\frac{2x - 3}{1 - x}} = 125$$

$$7) 9^{x - 3} = \sqrt[4]{81}$$

$$8) \log_2^{-x} + \log_2^{(x + 6)} + 1 = 0$$

$$9) \ln m - \ln(m + 1) = 0$$

$$10) \log(x + 1) - \log(x + 1)(x - 1) = 1$$

$$11) 2 \ln x + \ln 3 = 1$$

$$12) \left(\frac{3}{4}\right)^{x - 1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{11}{x}} = \left(\frac{27}{64}\right)^3$$